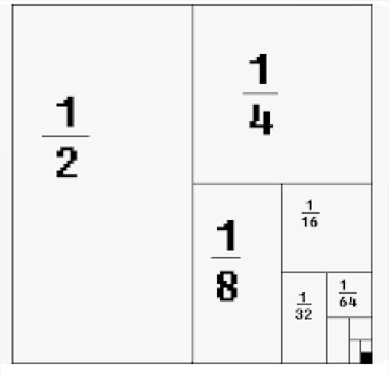
Szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\,(n+3)!\,3^n}{(2n)!}$$

dr Aneta Mikucka
Politechnika Koszalińska

SZEREGI LICZBOWE, KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW

- Co to jest szereg liczbowy?
- Co to znaczy, że jest zbieżny?
- Jakie są rodzaje zbieżności?
- Jak badać zbieżność szeregów?

Definicja 1 (definicja szeregu)

Niech dany będzie ciąg $(a_n)_{n\in N}$. Utwórzmy ciąg $\{S_n\}$ następujących sum:

$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{S_n = a_1 + a_2 + \cdots . + a_n}$.

Ciąg $\{S_n\}$ nazywamy **szeregiem liczbowym** i oznaczamy:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy **wyrazami szeregu,** a liczby $S_1, S_2, \ldots, S_n$ **sumami częściowymi szeregu.**

W szczególności: wyraz a_n nazywamy **wyrazem ogólnym szeregu**, a S_n – **n-tą sumą częściową.**

Definicja 2. (Przykłady szeregów)

a) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, gdzie $\alpha \in R$ nazywamy **szeregiem harmonicznym rzędu α.**

W szczególności szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazywamy **szeregiem harmonicznym.**

b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, gdzie $a_n > 0$ dla $n \in N_+$ nazywamy **szeregiem naprzemiennym.**

c) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$, czyli $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$. nazywamy **szeregiem geometrycznym.**

Twierdzenie 4. (Warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uwaga:

1.Warunek odwrotny nie zawsze jest prawdziwy, tzn. z tego, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nie musi wynikać zbieżność szeregu.

Warunek równoważny do Twierdzenia 4:

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje lub nie jest równa zero, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład:

Zbadać zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2+4}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+4}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Twierdzenie 5. (Zbieżność wybranych szeregów)

1. **Szereg Dirichleta** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest
   a) zbieżny dla $\alpha > 1$
   b) rozbieżny dla $\alpha \leq 1$

2. **Szereg geometryczny o wyrazie ogólnym** $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a \cdot q^{n-1}}$ jest
   a) zbieżny do sumy $S = \frac{a}{1-q}$, gdy $|q| < 1$
   b) rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

Przykład

a) Wyznacz x, aby szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-4)^n$ był zbieżny.

b) Wyznacz x, aby suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 x)^n$ była równa $\frac{1}{2}$.

c) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, w przypadku zbieżności wyznacz jego sumę.

d) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$, w przypadku zbieżności wyznacz jego sumę.

Twierdzenie 6.

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne odpowiednio do sumy a i b oraz c jest dowolną stałą, to szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$$

są zbieżne, przy czym

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = a - b, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$$

Twierdzenie 7.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny oraz $c \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ też jest rozbieżny.

Twierdzenie 8. (Kryterium porównawcze)

Jeżeli wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są **nieujemne** oraz istnieje liczba $n_0 \in N_+$ że dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność $a_n \leq b_n$, to

1) ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
2) z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Przykład. Zbadać zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Twierdzenie 9. (Kryterium d'Alemberta)

Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$ o wyrazach nieujemnych.

1) Jeżeli $lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g,\quad \boldsymbol{g < 1}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny**.

2) Jeżeli $lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g,\quad \boldsymbol{g > 1}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**.

Uwaga

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to kryterium to nie rozstrzyga o zbieżności szeregu

Przykład. Zbadać zbieżność szeregu : $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$, $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

Twierdzenie 10. (Kryterium Cauchye'go)

Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych.

1) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

2) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Uwaga1. Kryterium Cauchye'go można stosować do szeregów o wyrazach nieujemnych.

Uwaga 2. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to kryterium to nie rozstrzyga o zbieżności szeregu

Przykład. Zbadać zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

Twierdzenie 11. (Kryterium całkowe)

Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych oraz niech $n_0 \in N_+$.

Jeżeli funkcja f, określona na przedziale $[n_0, \infty)$

jest nieujemna, ciągła i nierosnąca,

to całka

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \quad \textbf{oraz} \quad \textbf{szereg} \ \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.

Przykład. Zbadać zbieżność szeregu:

$a)$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$, $b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, $c)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$.

Twierdzenie 13. (Kryterium ilorazowo- porównawcze)

Niech dane będą szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *oraz niech istnieje liczba* $n_0 \in N_+$ *że dla każdego* $n > n_0$ *mamy* $a_n > 0, b_n > 0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$ *, gdzie* $0 < g < \infty$*, to*

szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne.*

Przykład . Zbadać zbieżność szeregu a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^4+n+4}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} arc\,ctg n$

Twierdzenie 14. (Kryterium Leibniza)

Jeżeli szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ spełnia warunki:

1) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \ldots$
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ jest **zbieżny.**

Przykład . Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Definicja (Bezwzględna zbieżność i warunkowa)

Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dowolnych oraz szereg wartości bezwzględnych $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

1) Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

   Wówczas $\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{a_n}$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym**.

2) Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest nie jest zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

   (z kr. Leibniza)

   to $\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{a_n}$ nazywamy **warunkowo zbieżnym**.

Przykład .

Zbadaj zbieżność szeregów o wyrazach dowolnych, w przypadku zbieżności, określ rodzaj: a) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ b) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\frac{n^{100}}{100^n}$ c) $\sum_{i=0}^{n}\frac{\sin n}{5^n}$ d) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\frac{1}{n}$.

- **Przykład.** Zbadaj zbieżność szeregów o wyrazach dowolnych, w przypadku zbieżności, określ rodzaj zbieżności: a) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ b) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n \frac{n^{100}}{100^n}$ c) $\sum_{i=0}^{n} \frac{\sin n}{5^n}$ d) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n \frac{1}{n}$.

Sprawdzamy, czy szereg jest zbieżny bezwzględnie?
Czyli sprawdzamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Jeśli tak,
Odp. **Jest zbieżny bezwzględnie.**

Jeśli nie,
Sprawdzamy, czy jest zbieżny z kryterium Leibniza

Jeśli tak
Odp.
Jest zbieżny warunkowo

Jeśli nie
Odp. **Nie jest zbieżny**